Klausur zur Quantentheorie II, SS 2010 10.07.2010

Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes** Blatt!! Viel Erfolg!

Aufgabe 1 *Kurzfragen* (je 0.5 Punkte)

a) Wieviele reelle Parameter benötigt die Festlegung eines reinen Qubit-Zustandes?

b) Es gelte $\varrho\,(\mathbb{1}-\varrho)=0$. Ist ϱ ein reiner Zustand oder ein Gemisch?

c) $A=|\psi\rangle\langle\phi|$. Vereinfachen Sie $\mathrm{tr}(A^2)$.

d) Gilt $\sigma_x\otimes\sigma_z=\sigma_z\otimes\sigma_x$?

e) Welche der folgenden Zustände eines 2-Qubit-Systems sind verschränkt:
$|01\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-|10\rangle)$, $\frac{1}{2}\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\otimes\big(|0\rangle-|1\rangle\big)$?

f) Sind Superoperatoren in der Regel invertierbar?

g) Ist der Dichteoperator im Heisenbergbild zeitabhängig?

h) Sei $\Phi(\vec{r},t)$ ein Quantenfeld und $|\vec{k}\rangle=a^\dagger(\vec{k})\,|0\rangle$. $\langle\vec{k}|\Phi(\vec{r},t)|\vec{k}\rangle=$?

i) Welche der folgenden Größen sind Lorentz-invariant:
Energie E , Drehimpuls-Quadrat $\vec{L}^2$, Massendichte $m\,\psi^\dagger\gamma^0\psi$?

j) $\gamma^\mu\gamma^\nu=\ \frac{1}{2}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]+$?

Aufgabe 2 *Quanten-Ampel* (5 Punkte)

In einem Drei-Zustands-System („Qutrit“) mit Basis $\{|1\rangle\,,|2\rangle\,,|3\rangle\}$ definieren wir die Ampel-Observable $A\doteq 3\,\mathbb{1}+\left(\begin{smallmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$, mit Eigenwerten $(4,4,2)$ und zugehörigen Eigenzuständen $\big(|\mathrm{rot}\rangle\,,|\mathrm{gelb}\rangle\,,|\mathrm{grün}\rangle\big)$. Meßwerte $a=4$ und $a=2$ meinen also `STOP` bzw. `GO`. Ein reiner Strom von Quanten-Autos werde beschrieben durch Zustände

$$|\psi\rangle\ =\ \frac{1}{\sqrt{2+|\alpha|^2}}\big(|1\rangle+|2\rangle+\alpha\,|3\rangle\big)\qquad\text{mit freiem Parameter}\quad\alpha\in\mathbb{C}\ .$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für `STOP` und für `GO`.

b) Es wird ein Stromteiler als Weiche eingebaut, der eine Zerlegung $\mathbb{1}=F_1+F_2$ durch zwei Filter

$$F_1\doteq\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad F_2\doteq\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad\text{mit}\quad F_i^2=F_i\quad\&\quad F_1\,F_2=0$$

realisiert und demgemäß den Strom spaltet in die Teile $|\psi_i\rangle\propto F_i\,|\psi\rangle$ für $i=1,2$. Welcher Anteil der Autos fährt wohin? Berechnen Sie die `GO`-Wahrscheinlichkeiten $W_{\texttt{GO}}(|\psi_i\rangle)$ für beide Teile. Wo steht die Ampel öfter auf grün?

Hinweise:
Achten Sie auf das Normieren der Zustände! Vorschlag: Diagonalisieren Sie A und bestimmen Sie die Eigenraum-Projektoren $P_2\equiv P_{\texttt{GO}}$ und $P_4\equiv P_{\texttt{STOP}}$. Test: $A=2\,P_2+4\,P_4$.

Aufgabe 3 *Verschränkt oder nicht?* (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Zustände $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$, die jeweils aus zwei Qubits A und B (mit der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) zusammengesetzt sind:

$$|\psi_1\rangle = \tfrac{1}{2}\big(q\,|00\rangle - q\,|01\rangle + q^*\,|10\rangle - q^*\,|11\rangle \big) ,$$
$$|\psi_2\rangle = \tfrac{1}{2}\big(q\,|00\rangle + q\,|01\rangle + q^*\,|10\rangle - q^*\,|11\rangle \big) , \qquad \text{mit} \quad q^* q = 1 .$$

a) Geben Sie eine Schmidt-Zerlegung von $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ an.

b) Was ist jeweils die von Neumann-Entropie $S(\varrho_A) = -\operatorname{tr}_A(\varrho_A \log_2 \varrho_A)$ des *ersten* Teilsystems?

c) Ist einer der beiden Zustände verschränkt? Welchen der Zustände würden Sie in einem Experiment benutzen, um eine Verletzung der Bell-Ungleichung nachzuweisen?

Hinweise zu Teil a):
Bestimmen Sie zuerst die reduzierten Dichtematrizen $\varrho_A = \operatorname{tr}_B |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$ und $\varrho_B = \operatorname{tr}_A |\psi_1\rangle\langle\psi_1|$. Diagonalisieren Sie ϱ_A und ϱ_B. Schreiben Sie $|\psi_1\rangle$ als Linearkombination der Eigenvektor-Produkte. Man kann das Ergebnis auch erraten!
Wiederholen Sie die Rechnung für $|\psi_2\rangle$. Hier auf Entartung achten! Alternativ: setzen Sie an $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle\,|\phi\rangle + |1\rangle\,|\phi_\perp\rangle\big)$ mit $|\phi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$ und $\langle\phi_\perp|\,\phi\rangle = 0$.
Überprüfen Sie Ihre Resultate!

Aufgabe 4 *Bose-Feld im Fockraum* (5 Punkte)

Gegeben sei ein nichtrelativistisches Bose-Feld $\psi(\vec{r}) = \sum_k u_k(\vec{r})\, a_k$, wobei die $u_k(\vec{r})$ ein vollständiges Funktionensystem der zuständigen Schrödingergleichung bilden. Für den Vakuumzustand $|0\rangle$ des Systems gilt:

$$\langle 0|\,0\rangle = 1 \qquad \text{und} \qquad a_k\,|0\rangle = 0 \quad \forall\ k .$$

Betrachten Sie die Zustände $|i\rangle = a_i^\dagger\,|0\rangle$ und $|i,j\rangle = a_i^\dagger a_j^\dagger\,|0\rangle$ mit $i \neq j$.

a) Zeigen Sie, daß diese Zustände Eigenzustände zum Teilchenzahloperator $N = \sum_k a_k^\dagger a_k$ sind, d.h. daß $N\,|i\rangle = n_i\,|i\rangle$ sowie $N\,|i,j\rangle = n_{ij}\,|i,j\rangle$ gilt. Geben Sie n_i und n_{ij} an.

b) Zeigen Sie, daß der Felddrehimpuls-Operator

$$\vec{L} = \int \mathrm{d}^3 r\ \psi^\dagger(\vec{r}) \left(\vec{r} \times \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}\right) \psi(\vec{r})$$

die Matrixelemente

$$\langle i|\,\vec{L}\,|i\rangle = \vec{\ell}_{ii} \qquad \text{und} \qquad \langle i,j|\,\vec{L}\,|i,j\rangle = \vec{\ell}_{ii} + \vec{\ell}_{jj}$$

besitzt, wobei wir $\vec{\ell}_{km} = \int \mathrm{d}^3 r\ u_k^*(\vec{r})\,\big(\vec{r} \times \tfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla}\big)\,u_m(\vec{r})$ abkürzen.

Hinweis: Es gilt $[a_k, a_m^\dagger] = \delta_{km}$.

Aufgabe 5 *Dekohärenz auf der Blochkugel* (5 Punkte)

Gegeben sei ein Qubit A, welches an einen dreidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_E$ koppelt. Die Kraus-Operatoren für den sogenannten „Zwei-Pauli"-Kanal in $\mathcal{H}_A$ sind gegeben durch

$$M_0 = \sqrt{1-p}\,\mathbb{1} \quad , \qquad M_1 = \sqrt{\tfrac{p}{2}}\,\sigma_x \quad , \qquad M_2 = \sqrt{\tfrac{p}{2}}\,\sigma_z \quad , \qquad p \in [0,1] \ .$$

a) Bestätigen Sie, daß $\sum_\mu M_\mu^\dagger M_\mu = \mathbb{1}$. Wie lautet die unitäre Darstellung dieses Kanals in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E$? Geben Sie dazu seine Wirkung auf den Basis-Zuständen $|00\rangle \equiv |0\rangle_A |0\rangle_E$ und $|10\rangle \equiv |1\rangle_A |0\rangle_E$ an.

b) Berechnen Sie die Veränderung der Dichtematrix ϱ in $\mathcal{H}_A$ gemäß

$$\varrho' \ = \ \sum_\mu M_\mu\, \varrho\, M_\mu^\dagger \qquad \text{für} \qquad \varrho = \tfrac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{s}\cdot\vec{\sigma}) \ .$$

Wie entwickelt sich damit der dreidimensionale Blochvektor $\vec{s}$ unter der Wirkung des Zwei-Pauli-Kanals? Charakterisieren Sie die bewirkte Verformung der Blochkugel für p aus den Intervallen $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$.

Erinnerung:
Die Pauli-Matrizen erfüllen $\sigma_i\, \sigma_j = \delta_{ij} + \mathrm{i}\, \epsilon_{ijk}\, \sigma_k$. Explizit: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6 *Ortsoperator eines Dirac-Teilchens* (5 Punkte)

Berechnen Sie im Heisenbergbild die Zeitentwicklung des Ortsoperators $\vec{x}(t)$ eines kräftefreien relativistischen Teilchens und vergleichen Sie diese mit der aus der klassischen relativistischen Punktmechanik folgenden Bahn

$$\vec{x}(t) \ = \ \vec{x}(0) + \vec{v}\, t \qquad \text{mit} \qquad \vec{v} \ = \ c^2 \vec{p}/E \qquad \text{und} \qquad E \ = \ \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}^{\,2}} \ .$$

Der quantenmechanische Zusatzterm wird als „Zitterbewegung" interpretiert.

Anleitung:
Für jede Observable gilt in einem festen Inertialsystem $\dot{M} = \frac{i}{\hbar}[H, M]$ mit dem Diracschen Hamiltonoperator $H = c\,\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta$. Leiten Sie die Differentialgleichungen

$$\dot{\vec{x}}(t) \ = \ c\,\vec{\alpha}(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{\alpha}}(t) \ = \ -\tfrac{2\mathrm{i}}{\hbar}\big(\vec{\alpha}(t) - c\,\vec{p}\,H^{-1}\big)H$$

her und integrieren Sie diese, um $\vec{x}(t)$ zu finden. H und $\vec{p}$ sind Konstanten der Bewegung.

12 Punkte genügen zum Bestehen! *Don't panic!*